הפקולטה למתמטיקה
בטכניון

חדו"א 2מ1 — 104043

מבחן סוף סמסטר מועד א', אביב - 24.07.25

משך הבחינה שלוש שעות.
אין להשתמש בחומר עזר או באמצעי עזר מכל סוג שהוא, כולל מחשבון.
יש להשתמש בעט שחור או כחול. אין להשתמש בעפרון או בעט אדום.
יש לענות באופן מלא בגוף השאלון במקום המיועד לכך.
אין לפרק את השאלון ויש להחזירו בשלמותו בתום הבחינה.

בהצלחה!

חלק ב'

יש לרשום <u>בעמודים הבאים</u> פתרון מלא ומנומק לכל השאלות הבאות.

7. (26 נקודות) בשאלה זו אין בהכרח קשר בין הסעיפים.

(א) (13 נקודות) נתונה $f(x,y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$. מיצאו את הנקודות הקריטיות של f ומיינו (סווגו) אותן.

פתרון: $f(x,y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$ גזירה ברציפות בכל המישור ולכן הנקודות הקריטיות הן אלו עבורם הגרדיאנט מתאפס.

$$f'_x(x,y) = 8xe^y - 8x^3 = 0 \iff x(e^y - x^2) = 0$$
$$f'_y(x,y) = 4x^2e^y - 4e^{4y} = 0 \iff x^2e^y - e^{4y} = 0$$

אם $x = 0$ אז $-e^y = 0$ ולכן אין פתרון שבו $x = 0$.
אם $x \neq 0$ אז $e^y = x^2$ ולכן

$$e^y \cdot e^y - e^{4y} = 0 \iff e^{2y} = e^{4y} \iff 1 = e^{2y} \iff y = 0$$

ולכן $x^2 = 1$ שנותן כי $x = \pm 1$ ונקבל את הנקודות $(1,0), (-1,0)$.
$f(x,y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$ גזירה פעמיים ברציפות בכל המישור ולכן נוכל להשתמש בהסיאן בשביל למיין את הנקודות הקריטיות:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) = 8e^y - 24x^2 & f''_{xy}(x,y) = 8xe^y \\ f''_{xy}(x,y) = 8xe^y & f''_{yy}(x,y) = 4x^2e^y - 16e^{4y} \end{pmatrix}.$$

עבור $(1,0)$:

$$\det H_f(1,0) = \det \begin{pmatrix} -16 & 8 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} = 192 - 64 = 128 > 0, \quad f''_{xx}(1,0) = -16 < 0$$

ולכן $(1,0)$ הינה נקודת מקסימום מקומי.
עבור $(-1,0)$:

$$\det H_f(1,0) = \det \begin{pmatrix} -16 & -8 \\ -8 & -12 \end{pmatrix} = 192 - 64 = 128 > 0, \quad f''_{xx}(1,0) = -16 < 0$$

ולכן $(-1,0)$ הינה נקודת מקסימום מקומי.

(ב) (13 נקודות) תהי $f(x,y,z)=e^{x^2+2y^2+3z^2}+x^2+y^2+z^2$.
הוכיחו כי $f(x,y,z)$ מקבלת מינימום ומקסימום ב-

$$V=\{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2=9\}$$

ומיצאו אותם ואת הנקודות בהן הם מתקבלים.

פתרון: $f(x,y,z)=e^{x^2+2y^2+3z^2}+x^2+y^2+z^2$ רציפה בקבוצה הסגורה והחסומה
$V=\{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2=9\}$ ולכן לפי משפט וויארשטראס יש ל-
$f(x,y,z)=e^{x^2+2y^2+3z^2}+x^2+y^2+z^2$ מינימום ומקסימום בקבוצה
$V=\{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2=9\}$.
נגדיר $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-9$.
$f(x,y,z)=e^{x^2+2y^2+3z^2}+x^2+y^2+z^2,\ g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-9$ הן פונקציות גזירות ברציפות כיוון שאחת פולינום והשניה סכום של אקספוננט של פולינום ופולינום, שגזירים ברציפות.

$$\overline{\nabla}f(x,y,z)=\left(2xe^{x^2+2y^2+3z^2}+2x,4ye^{x^2+2y^2+3z^2}+2y,6ze^{x^2+2y^2+3z^2}+2z\right)$$

$$\overline{\nabla}g(x,y,z)=\left(2x,2y,2z\right)$$

וכיוון ש- $\overline{\nabla}g(x,y,z)=(0,0,0)\iff x=y=z=0$ וגם $(0,0,0)$ אינו מקיים את האילוץ $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-9=0$ אז נשתמש בכופלי לגרנג' :

$$\begin{aligned}
&2xe^{x^2+2y^2+3z^2}+2x+\lambda 2x=0 \iff x\left(e^{x^2+2y^2+3z^2}+1+\lambda\right)=0\\
&4ye^{x^2+2y^2+3z^2}+2y+\lambda 2y=0 \iff y\left(2e^{x^2+2y^2+3z^2}+1+\lambda\right)=0\\
&6ze^{x^2+2y^2+3z^2}+2z+\lambda 2z=0 \iff z\left(3e^{x^2+2y^2+3z^2}+1+\lambda\right)=0\\
&x^2+y^2+z^2=9.
\end{aligned}$$

כיוון ש-

$$e^{x^2+2y^2+3z^2}+1+\lambda<2e^{x^2+2y^2+3z^2}+1+\lambda<3e^{x^2+2y^2+3z^2}+1+\lambda$$

ולכן אם אחד מהם מתאפס, שניים האחרים לא מתאפסים ולכן שניים מתוך x,y,z מתאפסים (לא יכול להיות ששלושתם מתאפסים כי אז הנקודה לא מקיימת את האילוץ).
אם $x=y=0$ אז מהאילוץ $z=\pm 3$ ונקבל את הנקודות $(0,0,3),(0,0,-3)$.
באותו האופן נקבל את הנקודות $(3,0,0),(-3,0,0),(0,3,0),(0,-3,0)$.

$$\begin{aligned}
&f(\pm 3,0,0)=e^9+9 \quad \text{מינימום}\\
&f(0,\pm 3,0)=e^{18}+9\\
&f(0,0,\pm 3)=e^{27}+9 \quad \text{מקסימום}
\end{aligned}$$

8. (26 נקודות)

(א) (13 נקודות) יהי

$$\vec{F}(x,y)=\left(\frac{y}{2x^2+5y^2},\frac{-x}{2x^2+5y^2}\right).$$

חשבו את העבודה של השדה $\vec{F}$ לאורך העקום $L=\{(x,y)|\,x^2+y^2=1,\ y\geq 0\}$ מהנקודה $(1,0)$ לנקודה $(-1,0)$

שימו לב כי השדה אינו מוגדר בראשית.

רמז: הסתכלו על האליפסה $2x^2+5y^2=C$ עבור $C>0$ מתאים.

פתרון: השדה גזיר ברציפות ב- $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ ומתקיים כי

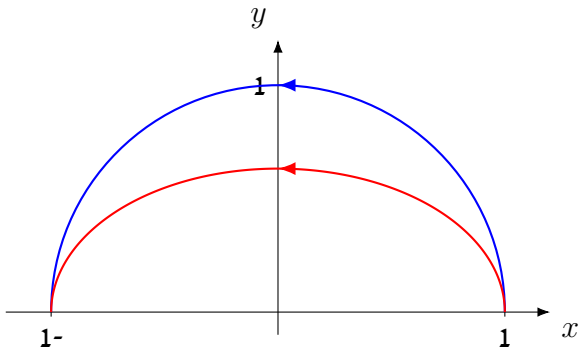
$$P'_y(x,y)=\frac{2x^2+5y^2-y\cdot 10y}{(2x^2+5y^2)^2}=\frac{2x^2-5y^2}{(2x^2+5y^2)^2}$$
$$Q'_x(x,y)=\frac{-2x^2-5y^2+x\cdot 4x}{(2x^2+5y^2)^2}=\frac{2x^2-5y^2}{(2x^2+5y^2)^2}=P'_y(x,y)$$

ב- D.

נסתכל על המסלול

$$L_1=\{(x,y)=2x^2+5y^2=2,\ y\geq 0\}=\{(x,y)=x^2+\frac{y^2}{\left(\frac{2}{5}\right)}=1,\ y\geq 0\}$$

מהנקודה $(1,0)$ לנקודה $(-1,0)$.



תהי D_1 הקבוצה שחסומה ע"י שני העקומים. זוהי קבוצה סגורה וחסומה שאינה מכילה את הראשית ושהשפה שלה היא איחוד של שני עקומים חלקים, ולכן לפי משפט גרין

$$\oint\limits_{\partial D_1=L+(-L_1)}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint\limits_{D_1}Q'_x(x,y)-P'_y(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1}0\,dxdy=0$$

ולכן מאדיטיביות

$$0=\oint\limits_{\partial D_1=L+(-L_1)}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\limits_{L}\vec{F}\cdot d\vec{r}-\int\limits_{L_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}\Rightarrow\int\limits_{L}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\limits_{L_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

נחשב $\int\limits_{L_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}$: נשתמש בהצגה הפרמטרית $\vec{r}(t)=\left(\cos t,\sqrt{\frac{2}{5}}\sin t\right),\quad 0\leq t\leq\pi$ עבורה $\vec{r}'(t)=\left(-\sin t,\sqrt{\frac{2}{5}}\cos t\right)$ וכיוון שזוהי האוריינטציה המתאימה אז נקבל

$$\int\limits_{L}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\limits_{L_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\limits_{0}^{\pi}\left(\frac{\sqrt{\frac{2}{5}}\sin t}{2},\frac{-\cos t}{2}\right)\cdot\left(-\sin t,\sqrt{\frac{2}{5}}\cos t\right)dt=-\frac{1}{\sqrt{10}}\pi.$$

(ב) (13 נקודות) יהי נתון המשטח

$$S = \{(x,y,z)|\, x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \geq 1\}$$

בעל אוריינטציה בה לנורמל רכיב z חיובי. חשבו את

$$\iint\limits_S \left(2x, y^2, z^4\right) \cdot \hat{n} d\sigma.$$

פתרון: נסתכל על המשטח

$$S_1 = \{(x,y,1)|\, x^2+y^2 \leq 3\}$$

עם אוריינטציה הפונה כלפי מטה.
אז $S+S_1$ היא השפה של הגוף

$$V = \{(x,y,z)|\, x^2+y^2 \leq 3,\ 1 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$$

עם האוריינטציה החיובית.
השדה $\vec{F}(x,y,z) = \left(2x, y^2, z^4\right)$ גזיר ברציפות בכל המישור ומתקיים כי

$$\operatorname{div}\left(\vec{F}\right)(x,y,z) = 2+2y+4z^3$$

ולכן לפי משפט גאוס

$$\oiint\limits_{\partial V = S+S_1} \left(2x, y^2, z^4\right) \cdot \hat{n} d\sigma = \iiint\limits_V 2+2y+4z^3 dxdydz.$$

$$\iiint\limits_V 2+2y+4z^3 dxdydz = \int\limits_1^2 \left(\iint\limits_{x^2+y^2 \leq 4-z^2} 2+2y+4z^3 dxdy \right) dz =$$

$$= \int\limits_1^2 \left(\iint\limits_{x^2+y^2 \leq 4-z^2} 2+4z^3 dxdy \right) dz + \int\limits_1^2 \left(\underbrace{\iint\limits_{x^2+y^2 \leq 4-z^2} 2y dxdy}_{=0} \right) dz =$$

$$= \int\limits_1^2 (2+4z^3)\pi(4-z^2) dz = \pi \int\limits_1^2 8-2z^2+16z^3-4z^5 dz = \pi \left(8z - \frac{2}{3}z^3 + 4z^4 - \frac{2}{3}z^6 \Big|_1^2 \right) =$$

$$= \pi \left(16 - \frac{16}{3} + 64 - \frac{128}{3} - 8 + \frac{2}{3} - 4 + \frac{2}{3} \right) = \frac{64\pi}{3}.$$

נחשב כעת את $\iint\limits_{S_1} \left(2x, y^2, z^4\right) \cdot \hat{n} d\sigma$: ניקח את ההצגה הפרמטרית הסטנדרטית
$\vec{r}(x,y) = (x,y,1), \quad x^2+y^2 \leq 3$ עבורו $\vec{r}'_x(x,y) \times \vec{r}(x,y) = (0,0,1)$ שהפוכה לאוריינטציה הנתונה, ולכן

$$\iint\limits_{S_1} \left(2x, y^2, z^4\right) \cdot \hat{n} d\sigma = -\iint\limits_{x^2+y^2 \leq 3} (2x, y^2, 1^4) \cdot (0,0,1) dxdy = -\iint\limits_{x^2+y^2 \leq 3} 1 dxdy = -3\pi.$$

ולכן, מאדיטיביות האינטגרל המשטחי

$$\iint\limits_S \left(2x, y^2, z^4\right) \cdot \hat{n} d\sigma = \iiint\limits_V 2+2y+4z^3 dxdydz - \iint\limits_{S_1} \left(2x, y^2, z^4\right) \cdot \hat{n} d\sigma = \frac{64\pi}{3} + 3\pi = \frac{73\pi}{3}.$$

$$\iiint\limits_V 2+2y+4z^3 dxdydz = \iint\limits_{x^2+y^2\le 3}\left(\int\limits_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}}(2+2y+4z^3)dz\right)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 3}\Big((2+2y)z+z^4\Big)\Big|_{z=1}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 3}\left((2+2y)\left(\sqrt{4-x^2-y^2}-1\right)+(4-x^2-y^2)^2-1\right)dxdy \underset{\text{פולריות}}{=}$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\sqrt{3}} 2r\sqrt{4-r^2}-2r+2r^2\sin\theta\Big(\sqrt{4-r^2}-1\Big)+r(4-r^2)^2-rdr\right)d\theta =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{2}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{6}(4-r^2)^3-\frac{3r^2}{2}\right)\Big|_{r=0}^{r=\sqrt{3}} =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{6}-\frac{9}{2}+\frac{16}{3}+\frac{64}{6}\right)=\frac{64\pi}{3}.$$